SEMINARIO 1.2
Hahn-Banach e l'integrale di Poisson

Alessandra Albanese e Sara Lamboglia

1 ✿ Introduzione astratta

Definizione 1.1. *Uno spazio X si dice di Hausdorff, se presi comunque x e y esistono due aperti U e V tali che $x \in U$, $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$.*

Definizione 1.2. *Indicheremo con $||f||_E = sup\{|f(x)| : \ x \in E\}$*

Sia K uno spazio compatto di Hausdorff e $H \subseteq K$ un sottoinsieme compatto, sia inoltre A un sottospazio di $C(K)$ tale che:

(i) $1 \in A$ (dove 1 é la $f(x) \equiv 1 \ \forall x \in K$)

(ii) $||f||_K = ||f||_H \ \forall f \in A$

Notiamo che

- se $f \in A$ e $f(y) = 0 \ \ \forall y \in H$ allora $f(x) = 0 \quad \forall x \in K$ perché da (ii) abbiamo che
$$|f(x)| \leq ||f||_K = ||f||_H = 0 \quad \forall x \in K \tag{1}$$
- se $f_1, f_2 \in A$ con $f_1(x) = f_2(x) \ \forall x \in H$ allora $f_1 = f_2$ in K, infatti basta scegliere $f = f_1 - f_2$ e procedere come prima.

Osservazione 1.3. *Si puó supporre H chiuso in quanto ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto é compatto.*

Esempio 1.4. *Sia $U = \{z : |z| < 1\}$ il disco aperto di raggio 1 nel piano complesso. Sia $K = \overline{U}$ e sia T la frontiera di U. Dimostriamo che ogni polinomio f cioé ogni funzione della forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

dove $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$ soddisfa la relazione

$$||f||_U = ||f||_H \tag{2}$$

(oss. la continuitá di f implica che l'estremo superiore di $|f|$ su U coincida con l'estremo superiore su $\overline{U}$).

Dimostrazione. Poiché $\overline{U}$ é compatto (perché chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$), esiste uno $z_0 \in \overline{U}$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ per tutti gli $z \in U$. Supponiamo f non costante e $z_0 \in U$; risulta allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=0}^{N} a_n[(z - z_0) + z_0]^n = \sum_{n=0}^{N} b_n(z - z_0)^n$$

e se $0 < r < 1 - |z_0|$, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{N} |b_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \tag{3}$$

infatti

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{n=0}^{N} b_n r^n e^{int}) \overline{(\sum_{k=0}^{N} b_k r^k e^{ikt})} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{N} |b_n|^2 r^{2n} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \neq k} b_n \overline{b_k} r^n r^K e^{i(n-k)t} dt$$

dove la seconda somma é zero.
Dunque poiché z_0 é il massimo si ha che:

$$\sum_{n=0}^{N} |b_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0)|^2 d\theta = |b_0|^2$$

Quindi $b_1 = b_2 = \cdots = b_N = 0$ e cioé f é costante. Dunque $z_0 \in T$ per ogni polinomio non costante f, e questo prova 2.
Si dimostra cosí un caso speciale del teorema del massimo modulo. $\square$

Se ora M indica tutte le funzioni su H che sono restrizioni ad H di elementi di A abbiamo che M é sottospazio di $C(H)$, inoltre ogni elemento di M ha un'unica estensione ad un elemento di A.
Possiamo quindi stabilire una corrispondenza biunivoca tra A e M che associa ad ogni $f \in A$ la sua restrizione ad H.
Fissiamo $x \in K$, l'applicazione

$$\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tale che}$$

$$\lambda(f) = f(x)$$

é un funzionale lineare limitato su M di norma 1 , infatti:
date $f, g \in M$ allora $\forall x \in H$ si ha

- $\lambda(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $||\lambda|| = \frac{|\lambda(f)|}{||f||_H} = \frac{|f(x)|}{||f||_H} \leq \frac{||f||_H}{||f||_H} = 1$, e é proprio 1.

Quindi per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare Λ su $C(H)$ di norma 1 che estende λ.

Definizione 1.5. *Un funzionale lineare ϕ si dice positivo se*

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(f) \geq 0$$

Lemma 1.6. *Sia Λ il funzionale lineare trovato prima, allora le proprietá*

(i) $\Lambda(1) = 1$

(ii) $||\Lambda|| = 1$

implicano che Λ é un funzionale lineare positivo su $C(H)$

Dimostrazione. Supponiamo che $f \in C(H)$ con $0 \leq f \leq 1$ e siano inoltre $g = 2f - 1$ e $\Lambda(g) = \alpha + i\beta$ con α e β reali, si ha che $-1 \leq g \leq 1$ cosí $|g + ir|^2 \leq 1 + r^2$, $r \in \mathbb{R}$ quindi per (i) e (ii) si ha

$$(\beta + r)^2 \leq |\alpha + i(\beta + r)|^2 = |\Lambda(g + ir)|^2 \leq 1 + r^2. \tag{4}$$

pertanto $\beta^2 + 2r\beta \leq 1 \forall r \in \mathbb{R}$ che implica $\beta = 0$. Poiché $||g||_H \leq 1$ si ha $|\alpha| \leq 1$ e quindi

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2}\Lambda(1 + g) = \frac{1}{2}(1 + \alpha) \geq 0 \tag{5}$$

□

Definizione 1.7. *X si dice uno spazio localmente compatto se ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni compatti.*

Lemma 1.8. *Uno spazio topologico di Hausdorff é localmente compatto se e solo se ogni punto possiede un intorno compatto.*

Teorema 1.9. *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff e sia Λ un funzionale positivo lineare su $C_0(X)$ esiste una σ-algebra Σ in X che contiene tutti i boreliani di X e un'unica misura μ che rappresenta Λ nel senso che*

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu \ \forall f \in C(X)$$

Applicando ora il teorema al funzionale Λ trovato prima si ha che esiste una misura μ_x su H tale che

$$\Lambda(f) = \int_H f d\mu_x \ \forall f \in C(H)$$

e quindi in particolare otteniamo la seguente formula di rappresentazione

$$f(x) = \int_H f d\mu_x \quad f \in A$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\forall x \in K$ esiste una misura in H la quale rappresenta x nel senso che vale per ogni f in A

Osservazione 1.10. *Si ha che Λ determina μ_x univocamente ma non é detto che l'estensione di Hahn-Banach sia unica. Quindi non si puó dire nulla sull'unicitá delle misure rappresentative tranne che in particolari condizioni*

Abbiamo quindi dimostrato che se $f \in A$ sottospazio lineare di $C(H)$, $f(x)$ con $x \in K$ dipende unicamente dalla restrizione di f ad H. La sua dipendenza é esplicitata con $f(x) = \int_H f(z) d\mu_x$ attraverso il procedimento illustrato prima.

2 ✿ L'integrale di Poisson

Sia A un qualsiasi sottospazio di $C(\overline{U})$ (dove U é sempre il disco unitario) contenente tutti i polinomi e tale che

$$||f||_U = ||f||_T \tag{6}$$

valga per ogni $f \in A$. A potrebbe consistere esclusivamente di polinomi oppure potrebbe essere piú ampio.
Il risultato generale ottenuto precedentemente si applica a A e mostra che ad ogni $z \in U$ corrisponde una misura positiva di Borel μ_z su T tale che

$$f(z) = \int_T f d\mu_z \quad (f \in A) \tag{7}$$

(Questo risultato vale anche per $z \in T$ ma in tal caso é banale in quanto μ_z sarebbe soltanto la massa unitá concentrata nel punto z.)
Fissiamo ora $z \in U$ e scriviamo $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R})$.
Se $u_n(w) = w^n$, allora $u_n \in A$ per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, e la 7 mostra che

$$r^n e^{in\theta} = \int_T u_n d\mu_z \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{8}$$

Essendo $u_{-n} = \overline{u}_n$, su T, dalla 8 segue che

$$\int_T e^{int} d\mu_z = r^{|n|} e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{9}$$

Questo ci porta a considerare la funzione reale

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

in quanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ij(\theta - t)} e^{int} dt = r^{|n|} e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{11}$$

Infatti si osserva che la serie 10 é maggiorata in modulo dalla serie geometrica convergente $\sum r^{|n|}$, di conseguenza converge totalmente e quindi uniformemente.
É quindi possibile scambiare serie e integrale, e integrare termine a termine, ottenendo cosí la 11. Confrontando poi la 11 e la 9 si ottiene

$$\int_T f d\mu_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) e^{int} dt \tag{12}$$

per $f = u_n$ e quindi per ogni polinomio trigonometrico f.

Teorema 2.1. *Per $f \in C(T)$ e $\epsilon > 0$, esiste un polinomio trigonometrico P tale che*

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$

Il teorema implica che la 12 sia valida per ogni $f \in C(T)$ in quanto esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f e dunque possiamo scambiare limite ed integrale e mostrare la rappresentazione anche per f.
In particolare la 12 vale per $f \in A$ e la 7 dá la rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) e^{int} dt \tag{13}$$

Inoltre la serie 10 puó essere sommata esplicitamente, in quanto essa é la parte reale di

$$1 + 2\sum_{1}^{\infty} (ze^{-it})^n = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{(e^{it} + re^{i\theta})\overline{(e^{it} - z)}}{(e^{it} - z)\overline{(e^{it} - z)}} = \tag{14}$$

$$= \frac{(e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2 + 2ir\sin(\theta - t)}{|1 - ze^{-it}|^2}$$

Pertanto

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \tag{15}$$

Questo é il cosiddetto nucleo di Poisson. Si osservi che $P_r(\theta - t) \geq 0$ per $0 \leq r \leq 1$.
Possiamo riassumere i risultati ottenuti:

Teorema 2.2. *Supponiamo che A sia uno spazio vettoriale di funzioni continue complesse sul disco unitario chiuso U. Se A contiene tutti i polinomi e se:*

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \sup_{z \in T} |f(z)| \tag{16}$$

per ogni $f \in A$ (e T é la circonferenza unitaria, frontiera di U) vale la rappresentazione integrale di Poisson

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} f(e^{it}) \tag{17}$$

per ogni $f \in A$ e ogni $z \in U$